Ebene - Ebene

Spickzettel Aufgaben Lösungen PLUS Lernvideos

Den **Schnittwinkel** α zwischen den Ebenen $E:\vec{x}$ und $F:\vec{x}$ kannst du mit der **Cosinus- Formel** berechnen:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_E}\cdot\overrightarrow{n_F}\right|}{\left|\overrightarrow{n_E}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_F}\right|}$$

Du brauchst also jeweils einen **Normalvektor** der Ebenen. Ein **Normalvektor** ist ein Vektor der senkrecht auf der Ebene steht. Bei der **Normalenform** oder **Koordinatenform** kannst du ihn direkt ablesen, ansonsten berechnest du ihn mit dem **Kreuzprodukt** der Richtungsvektoren.

Wenn du die Normalvektoren bestimmt hast, kannst du den Schnittwinkel durch Einsetzen in die obere Formel berechnen.

Beispiel

Winkel zwischen den Ebenen

$$E:\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{p}) = \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 0$$

und

$$F:\vec{n}\circ(\vec{x}-\vec{p}) = \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} = 0$$

Nun kannst du den Normalvektoren aus der Ebenengleichung herauslesen:

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

Anschließend kannst du die Normalvektoren der Ebenen in die Cosinus-Formel einsetzen und erhälst den Schnittwinkel zwischen den Ebenen.

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right|} \\
&= \frac{|-1+2-2|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{1+4+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} \\
&= \frac{1}{6} \qquad |\cos^{-1} \\
\alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right) \\
&= 80,41^\circ
\end{aligned}$$